Objetivos a cubrir **Código : MAT-CDI.1**

- Antiderivadas. Integral indefinida. Propiedades de la integral indefinida.
- Notación sigma. Sumas especiales y telescópicas.
- Principio de Inducción Matemática.

Ejercicios resueltos

Ejemplo 1 : *Demuestre que si* $f(x) = \operatorname{arcsen} x$, *entonces* $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, *con* $-1 < x < 1$.

Demostración : Es conocido que la función inversa de $g(x) = \operatorname{sen} x$, es $f(x) = \operatorname{arcsen} x$, definida en $-1 \leq x \leq 1$, es decir, $g^{-1}(x) = f(x)$, además si una función g tiene inversa y es diferenciable, entonces g^{-1} es diferenciable y su derivada viene dada por

$$\left(g^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{g'\left(g^{-1}(x)\right)}.$$

Como $g'(x) = \cos x$, se tiene que

$$\left(g^{-1}(x)\right)' = (\operatorname{arcsen} x)' = \frac{1}{\cos(\operatorname{arcsen} x)},$$

puesto que,

$$\operatorname{sen}^2(\cdot) + \cos^2(\cdot) = 1 \qquad \text{entonces,} \qquad \cos(\cdot) = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(\cdot)},$$

por lo tanto,

$$\cos(\operatorname{arcsen} x) = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(\operatorname{arcsen} x)} = \sqrt{1 - (\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x))^2} = \sqrt{1-x^2},$$

luego

$$(\operatorname{arcsen} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

definida para $-1 < x < 1$. ★

Ejemplo 2 : *Hallar una función* f, *tal que se cumpla la siguiente igualdad*

$$\int f(x)\ dx = \operatorname{arcsen} x + C$$

Solución : Por la definición de primitiva se tiene que cumplir

$$(\operatorname{arcsen} x + C)' = f(x)$$

así,

$$\underbrace{(\operatorname{arcsen} x + C)'}_{\substack{\uparrow \\ \text{Derivada de una} \\ \text{suma de funciones}}} = \underbrace{(\operatorname{arcsen} x)'}_{\substack{\uparrow \\ \text{Derivada:} \\ \text{Ver ejemplo 1}}} + \underbrace{(C)'}_{\substack{\uparrow \\ \text{Derivada de} \\ \text{una constante}}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + 0 = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Luego

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

★

Ejemplo 3 : *Hallar una función f, tal que se cumpla la siguiente igualdad*

$$\int f(x)\ dx = \arctan\left(\sqrt{x}\right) + C$$

Solución : Por la definición de primitiva se tiene que cumplir

$$\left(\arctan\left(\sqrt{x}\right) + C\right)' = f(x)$$

así,

$$\underbrace{\left(\arctan\left(\sqrt{x}\right) + C\right)'}_{\boxed{\text{Derivada de una suma de funciones}}} = \underbrace{\left(\arctan\left(\sqrt{x}\right)\right)'}_{\boxed{\text{Derivada: Regla de la cadena}}} + \underbrace{(C)'}_{\boxed{\text{Derivada de una constante}}} = \frac{1}{1+\left(\sqrt{x}\right)^2}\left(\sqrt{x}\right)' + 0 = \frac{1}{1+x}\ \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Luego

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}\,(1+x)}$$

★

Ejemplo 4 : *Integre* $\displaystyle\int \sqrt[4]{2p^3x}\ dx$

Solución : Por propiedades de radicales

$$\sqrt[4]{2p^3x} = \sqrt[4]{2p^3}\ \sqrt[4]{x},$$

entonces

$$\int \sqrt[4]{2p^3x}\ dx = \int \underbrace{\sqrt[4]{2p^3}}_{\boxed{\text{Sale de la integral por ser constante respecto a la variable de integración}}}\ \sqrt[4]{x}\ dx = \sqrt[4]{2p^3}\int \sqrt[4]{x}\ dx = \sqrt[4]{2p^3}\underbrace{\int x^{1/4}\ dx}_{\boxed{\int x^n\ dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+C \quad \text{con} \quad n=\frac{1}{4}}} = \sqrt[4]{2p^3}\ \frac{4}{5}\ x^{5/4} + C$$

Finalmente

$$\int \sqrt[4]{2p^3x}\ dx = \frac{4}{5}\ \sqrt[4]{2p^3}\ x^{5/4} + C$$

★

Ejemplo 5 : *Integre* $\displaystyle\int \sqrt[4]{2p^3x}\ dp$

Solución : Por propiedades de radicales

$$\sqrt[4]{2p^3x} = \sqrt[4]{2x}\ \sqrt[4]{p^3},$$

entonces

$$\int \sqrt[4]{2p^3x}\ dp = \int \underbrace{\sqrt[4]{2x}}_{\boxed{\text{Sale de la integral por ser constante respecto a la variable de integración}}}\ \sqrt[4]{p^3}\ dp = \sqrt[4]{2x}\int \sqrt[4]{p^3}\ dp = \sqrt[4]{2x}\underbrace{\int p^{3/4}\ dp}_{\boxed{\int x^n\ dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+C \quad \text{con} \quad n=\frac{3}{4}}} = \sqrt[4]{2x}\ \frac{4}{7}\ p^{7/4} + C$$

Finalmente

$$\int \sqrt[4]{2p^3 x}\ dp = \frac{4}{7}\ \sqrt[4]{2x}\ p^{7/4} + C$$

★

Ejemplo 6 *: Integre* $\displaystyle\int \cos(t-x)\ dx$

Solución : Es conocida la identidad trigonométrica

$$\cos(t-x) = \cos t \cos x + \operatorname{sen} t \operatorname{sen} x,$$

entonces

Por linealidad de la integral indefinida

$$\int \cos(t-x)\ dx = \int (\cos t \cos x + \operatorname{sen} t \operatorname{sen} x)\ dx \overset{\downarrow}{=} \int \underbrace{\cos t}_{\uparrow} \cos x\ dx + \int \underbrace{\operatorname{sen} t}_{\uparrow} \operatorname{sen} x\ dx$$

Sale de la integral por ser constante respecto a la variable de integración

$$= \cos t \int \cos x\ dx + \operatorname{sen} t \int \operatorname{sen} x\ dx = -\cos t \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} t \cos x + C$$

Finalmente

$$\int \cos(t-x)\ dx = -\cos t \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} t \cos x + C$$

★

Ejemplo 7 *: Integre* $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^3 x + 2\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x - 2}{\cos^2 x}\ dx$

Solución : Es conocido que

$$\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$$

así, la integral se puede escribir como

$$\int \frac{\operatorname{sen}^3 x + 2\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x - 2}{\cos^2 x}\ dx = \int \frac{\operatorname{sen}^3 x + 2\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x - 2}{1 - \operatorname{sen}^2 x}\ dx$$

Observemos que la expresión del numerador se puede factorizar como

$$\operatorname{sen}^3 x + 2\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x - 2 = \operatorname{sen}^2 x (\operatorname{sen} x + 2) - (\operatorname{sen} x + 2) = (\operatorname{sen} x + 2)\left(\operatorname{sen}^2 x - 1\right),$$

mientras que en el término del denominador podemos sacar -1 como factor común y nos queda

$$1 - \operatorname{sen}^2 x = -\left(\operatorname{sen}^2 x - 1\right)$$

la integral se escribe

$$\int \frac{\operatorname{sen}^3 x + 2\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x - 2}{1 - \operatorname{sen}^2 x}\ dx = \int \frac{(\operatorname{sen} x + 2)\left(\operatorname{sen}^2 x - 1\right)}{-\left(\operatorname{sen}^2 x - 1\right)}\ dx = -\int (\operatorname{sen} x + 2)\ dx$$

$$= -\int \operatorname{sen} x\ dx - \int 2\ dx = \cos x - 2x + C.$$

Finalmente

$$\int \frac{\operatorname{sen}^3 x + 2\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x - 2}{\cos^2 x}\ dx = \cos x - 2x + C$$

★

Ejemplo 8 *: Integre* $\displaystyle\int \frac{(x-1)^2\ dx}{\sqrt[4]{x^3}\,(\sqrt{x}-1)}$

Solución : Aplicamos la conjugada de la expresión $\sqrt{x}-1$, es decir, multiplicamos y dividimos por el término $\sqrt{x}+1$

$$\int \frac{(x-1)^2\ dx}{\sqrt[4]{x^3}\,(\sqrt{x}-1)} = \int \frac{(x-1)^2}{\sqrt[4]{x^3}\,(\sqrt{x}-1)}\frac{(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)}\ dx = \int \frac{(x-1)^2(\sqrt{x}+1)}{\sqrt[4]{x^3}\left((\sqrt{x})^2-(1)^2\right)}\ dx$$

$$= \int \frac{(x-1)^2(\sqrt{x}+1)}{\sqrt[4]{x^3}\,(x-1)}\ dx = \int \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt[4]{x^3}}\ dx,$$

desarrollamos el término del numerador

$$(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right) = x\sqrt{x}+x-\sqrt{x}-1 = x^{3/2}+x-x^{1/2}-1,$$

entonces,

$$\int \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt[4]{x^3}}\ dx = \int \frac{x^{3/2}+x-x^{1/2}-1}{\sqrt[4]{x^3}}\ dx$$

$$= \int \left(\frac{x^{3/2}}{x^{3/4}}+\frac{x}{x^{3/4}}-\frac{x^{1/2}}{x^{3/4}}-\frac{1}{x^{3/4}}\right)\ dx$$

$$= \int \left(x^{3/2-3/4}+x^{1-3/4}-x^{1/2-3/4}-x^{-3/4}\right)\ dx$$

$$= \int x^{3/4}\ dx + \int x^{1/4}\ dx - \int x^{-1/4}\ dx - \int x^{-3/4}\ dx$$

$$= \frac{4}{7}\ x^{7/4}+\frac{4}{5}\ x^{5/4}-\frac{4}{3}\ x^{3/4}-4x^{1/4}+C$$

Finalmente

$$\int \frac{(x-1)^2\ dx}{\sqrt[4]{x^3}\,(\sqrt{x}-1)} = \frac{4}{7}\ x^{7/4}+\frac{4}{5}\ x^{5/4}-\frac{4}{3}\ x^{3/4}-4x^{1/4}+C$$

★

Ejemplo 9 *: Integre* $\displaystyle\int \frac{x^2-16}{2-\sqrt{x}}\ dx$

Solución : Aplicamos la conjugada de la expresión $2-\sqrt{x}$, es decir, multiplicamos y dividimos por el término $2+\sqrt{x}$

$$\int \frac{x^2-16}{2-\sqrt{x}}\ dx = \int \frac{\left(x^2-16\right)}{(2-\sqrt{x})}\frac{(2+\sqrt{x})}{(2+\sqrt{x})}\ dx = \int \frac{\left(x^2-16\right)(2+\sqrt{x})}{\left((2)^2-(\sqrt{x})^2\right)}\ dx = \int \frac{\left(x^2-16\right)(2+\sqrt{x})}{4-x}\ dx$$

Observemos que el polinomio del numerador se puede factorizar como

$$x^2-16 = (x-4)(x+4) = -(4-x)(x+4),$$

así,

$$\int \frac{\left(x^2-16\right)(2+\sqrt{x})}{4-x}\ dx = \int \frac{-(4-x)(x+4)(2+\sqrt{x})}{4-x}\ dx = -\int (x+4)\left(2+\sqrt{x}\right)\ dx,$$

desarrollando esta expresión

$$(x+4)\left(2+\sqrt{x}\right)=2x+x\sqrt{x}+8+4\sqrt{x}=2x+x^{3/2}+8+4x^{1/2}$$

la integral nos queda

$$\begin{aligned}-\int (x+4)\left(2+\sqrt{x}\right)\ dx &= -\int\left(2x+x^{3/2}+8+4x^{1/2}\right)\ dx\\ &= -\left(\int 2x\ dx+\int x^{3/2}\ dx+\int 8\ dx+\int 4x^{1/2}\ dx\right)\\ &= -\left(x^2+\frac{2}{5}\ x^{5/2}+8x+\frac{8}{3}\ x^{3/2}\right)+C\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\int \frac{x^2-16}{2-\sqrt{x}}\ dx=-\left(x^2+\frac{2}{5}\ x^{5/2}+8x+\frac{8}{3}\ x^{3/2}\right)+C$$

★

Ejemplo 10 *: Integre* $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^2 x\ dx}{\cos^2(x/2)}$

Solución : Es conocido que

$$\operatorname{sen} 2(\cdot)=2\operatorname{sen}(\cdot)\cos(\cdot), \tag{1}$$

por otro lado,

$$\operatorname{sen} x=\operatorname{sen} 2\left(\frac{x}{2}\right)$$

por la ecuación (1) se tiene

$$\operatorname{sen} x=2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) \qquad \Longrightarrow \qquad \operatorname{sen}^2 x=\left(2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2=4\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

así,

$$\int \frac{\operatorname{sen}^2 x\ dx}{\cos^2(x/2)}=\int\frac{4\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2(x/2)}\ dx=\int 4\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)\ dx$$

como

$$\operatorname{sen}^2(\cdot)=\frac{1-\cos 2(\cdot)}{2},$$

entonces,

$$\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{1-\cos 2\left(\frac{x}{2}\right)}{2}=\frac{1-\cos x}{2},$$

esto implica

$$\begin{aligned}\int 4\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)\ dx &= \int 4\ \frac{1-\cos x}{2}\ dx=\int 2(1-\cos x)\ dx\\ &= 2\left(\int dx-\int\cos x\ dx\right)=2x-2\operatorname{sen} x+C\end{aligned}$$

Finalmente

$$\int \frac{\operatorname{sen}^2 x\ dx}{\cos^2(x/2)}=2x-2\operatorname{sen} x+C$$

★

Ejemplo 11 *: Integre* $\displaystyle\int \frac{\cos^2(\operatorname{arcsen} x)}{x^5}\,dx$

Solución : Es conocido que

$$\cos^2(\cdot) = 1 - \operatorname{sen}^2(\cdot) \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x) = x,$$

entonces

$$\cos^2(\operatorname{arcsen} x) = 1 - \operatorname{sen}^2(\operatorname{arcsen} x) = 1 - (\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x))^2 = 1 - x^2,$$

por lo tanto,

$$\int \frac{\cos^2(\operatorname{arcsen} x)}{x^5}\,dx = \int \frac{1-x^2}{x^5}\,dx = \int \left(\frac{1}{x^5} - \frac{x^2}{x^5}\right)dx$$

$$= \int \frac{1}{x^5}\,dx - \int \frac{x^2}{x^5}\,dx = \int x^{-5}\,dx - \int x^{-3}\,dx = -\frac{1}{4x^4} + \frac{1}{2x^2} + C,$$

es decir,

$$\int \frac{\cos^2(\operatorname{arcsen} x)}{x^5}\,dx = -\frac{1}{4x^4} + \frac{1}{2x^2} + C$$

★

Ejemplo 12 *: Integre* $\displaystyle\int \operatorname{sen}^6 x \cos x\,dx$

Solución : Observemos que en el integrando aparece la función seno y su derivada, así, podemos proponer el cambio de variable

$$u = \operatorname{sen} x, \qquad du = \cos x\,dx$$

y la integral se transforma en

$$\int \operatorname{sen}^6 x \cos x\,dx = \int \Big(\underbrace{\operatorname{sen} x}_{\boxed{u}}\Big)^6 \underbrace{\cos x\,dx}_{\boxed{du}} = \underbrace{\int u^6\,du}_{\boxed{\substack{\text{Integral de una potencia}\\ \text{Integral más sencilla que la inicial}}}} = \frac{u^7}{7} + C$$

como $u = \operatorname{sen} x$, se tiene

$$\int \operatorname{sen}^6 x \cos x\,dx = \frac{\operatorname{sen}^7 x}{7} + C$$

★

Ejemplo 13 *: Integre* $\displaystyle\int \sqrt[3]{\cos^2 t}\,\operatorname{sen} t\,dt$

Solución : Observemos que en el integrando aparece la función coseno y su derivada, así, podemos proponer el cambio de variable

$$u = \cos t, \qquad du = -\operatorname{sen} t\,dt \implies -du = \operatorname{sen} t\,dt$$

y la integral se transforma en

$$\int \sqrt[3]{\cos^2 t}\,\operatorname{sen} t\,dt = \int \cos^{2/3} t\,\operatorname{sen} t\,dt = \int \Big(\underbrace{\cos t}_{\boxed{u}}\Big)^{2/3} \underbrace{\operatorname{sen} t\,dt}_{\boxed{du}} = \underbrace{\int u^{2/3}\,du}_{\boxed{\substack{\text{Integral de una potencia}\\ \text{Integral más sencilla que la inicial}}}} = \frac{u^{5/3}}{5/3} + C$$

como $u = \cos t$, se tiene

$$\int \sqrt[3]{\cos^2 t}\,\operatorname{sen} t\; dt = \frac{3}{5}\cos^{5/3} t + C$$

★

Ejemplo 14 : *Integre* $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}}$

Solución : Es conocido que

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsen} x + C,$$

entonces

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{5\left(1-\dfrac{x^2}{5}\right)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{5}\,\sqrt{1-\dfrac{x^2}{5}}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\dfrac{x^2}{\left(\sqrt{5}\right)^2}}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x}{\sqrt{5}}\right)^2}},$$

hacemos el cambio de variable

$$u = \frac{x}{\sqrt{5}}, \qquad\qquad du = \frac{1}{\sqrt{5}}\,dx \implies \sqrt{5}\,du = dx$$

y la integral nos queda

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{\overbrace{dx}^{\boxed{\sqrt{5}\,du}}}{\sqrt{1-\Bigg(\underbrace{\dfrac{x}{\sqrt{5}}}_{\boxed{u}}\Bigg)^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{\sqrt{5}\,du}{\sqrt{1-u^2}} = \overbrace{\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}}^{\boxed{\text{Integral del arcoseno. Integral más sencilla que la inicial.}}} = \operatorname{arcsen} u + C,$$

como $u = \dfrac{x}{\sqrt{5}}$, se tiene que

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}} = \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right) + C$$

★

Ejemplo 15 : *Integre* $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}$

Solución : Completamos cuadrado

$$-x^2+4x-3 = -(x-2)^2+1,$$

es decir, la integral se escribe como

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(x-2)^2}},$$

hacemos el cambio de variable

$$u = x-2, \qquad\qquad du = dx$$

de aquí,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}} = \int \frac{\overbrace{dx}^{\boxed{du}}}{\sqrt{1-\Big(\underbrace{x-2}_{\boxed{u}}\Big)^2}} = \overbrace{\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}}^{\boxed{\text{Integral del arcoseno. Integral más sencilla que la inicial.}}} = \operatorname{arcsen} u + C,$$

como $u = x-2$, se tiene que

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}} = \operatorname{arcsen}(x-2) + C$$

★

Ejemplo 16 : *Integre* $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{12x-4x^2-5}}$

Solución : Completamos cuadrado

$$-4x^2+12x-5 = -(2x-3)^2+4,$$

es decir, la integral se escribe como

$$\int \frac{dx}{\sqrt{12x-4x^2-5}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4-(2x-3)^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4\left(1-\frac{(2x-3)^2}{4}\right)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4}\sqrt{\left(1-\frac{(2x-3)^2}{4}\right)}}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{(2x-3)^2}{2^2}}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{2x-3}{2}\right)^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}}$$

hacemos el cambio de variable

$$u = x - \frac{3}{2}, \qquad\qquad du = dx,$$

de aquí,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{12x-4x^2-5}} = \frac{1}{2}\int \frac{\overbrace{dx}^{\boxed{du}}}{\sqrt{1-\Big(\underbrace{x-\frac{3}{2}}_{\boxed{u}}\Big)^2}} = \frac{1}{2}\overbrace{\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}}^{\boxed{\text{Integral del arcoseno. Integral más sencilla que la inicial.}}} = \frac{1}{2}\operatorname{arcsen} u + C,$$

como $u = x - \frac{3}{2}$, se tiene que

$$\int \frac{dx}{\sqrt{12x-4x^2-5}} = \frac{1}{2}\operatorname{arcsen}\left(x-\frac{3}{2}\right) + C$$

★

Ejemplo 17 *: Integre* $\displaystyle\int \frac{dx}{6+x^2}$

Solución : Es conocido que

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C,$$

entonces

$$\int \frac{dx}{6+x^2} = \int \frac{dx}{6\left(1+\dfrac{x^2}{6}\right)} = \frac{1}{6}\int \frac{dx}{1+\dfrac{x^2}{\left(\sqrt{6}\right)^2}} = \frac{1}{6}\int \frac{dx}{1+\left(\dfrac{x}{\sqrt{6}}\right)^2},$$

hacemos el cambio de variable

$$u = \frac{x}{\sqrt{6}}, \qquad du = \frac{1}{\sqrt{6}}\, dx \implies \sqrt{6}\, du = dx$$

y la integral nos queda

$$\int \frac{dx}{6+x^2} = \frac{1}{6}\int \frac{\overbrace{dx}^{\boxed{\sqrt{6}\, du}}}{1+\Bigg(\underbrace{\dfrac{x}{\sqrt{6}}}_{\boxed{u}}\Bigg)^2} = \frac{1}{6}\int \frac{\sqrt{6}\, du}{1+u^2} = \frac{\sqrt{6}}{6}\overbrace{\int \frac{du}{1+u^2}}^{\boxed{\substack{\text{Integral de la arcotangente.}\\ \text{Integral más sencilla que la inicial.}}}} = \frac{\sqrt{6}}{6}\arctan u + C,$$

como $u = \dfrac{x}{\sqrt{6}}$, se tiene que

$$\int \frac{dx}{6+x^2} = \frac{\sqrt{6}}{6}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{6}}\right) + C$$

★

Ejemplo 18 *: Integre* $\displaystyle\int \frac{x\, dx}{1+x^4}$

Solución : Escribimos la integral como

$$\int \frac{x\, dx}{1+x^4} = \int \frac{x\, dx}{1+\left(x^2\right)^2}$$

y hacemos el cambio de variable

$$u = x^2, \qquad du = 2x\, dx \implies \frac{du}{2} = dx,$$

la integral nos queda

$$\int \frac{x\, dx}{1+x^4} = \int \frac{\overbrace{x\, dx}^{\boxed{du/2}}}{1+\Big(\underbrace{x^2}_{\boxed{u}}\Big)^2} = \int \frac{du/2}{1+u^2} = \frac{1}{2}\underbrace{\int \frac{du}{1+u^2}}_{\boxed{\substack{\text{Integral de la arcotangente.}\\ \text{Integral más sencilla que la inicial.}}}} = \frac{1}{2}\, \arctan u + C$$

como $u = x^2$ tenemos

$$\int \frac{x\ dx}{1+x^4} = \frac{1}{2}\ \arctan\left(x^2\right) + C.$$

★

Ejemplo 19 : *Integre* $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+10x+26}$

Solución : Completamos cuadrado

$$x^2+10x+26 = (x+5)^2+1,$$

es decir, la integral se escribe como

$$\int \frac{dx}{x^2+10x+26} = \int \frac{dx}{(x+5)^2+1},$$

hacemos el cambio de variable

$$u = x+5, \qquad\qquad du = dx$$

de aquí,

$$\int \frac{dx}{x^2+10x+26} = \int \frac{\overbrace{dx}^{\boxed{du}}}{\Big(\underbrace{x+5}_{\boxed{u}}\Big)^2+1} = \overbrace{\int \frac{du}{u^2+1}}^{\boxed{\text{Integral de la arcotangente. Integral más sencilla que la inicial.}}} = \arctan u + C,$$

como $u = x+5$, se tiene que

$$\int \frac{dx}{x^2+10x+26} = \arctan(x+5) + C$$

★

Ejemplo 20 : *Integre* $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-6x+13}$

Solución : Completamos cuadrado

$$x^2-6x+13 = (x-3)^2+4,$$

es decir, la integral se escribe como

$$\int \frac{dx}{x^2-6x+13} = \int \frac{dx}{(x-3)^2+4} = \int \frac{dx}{4\left(\dfrac{(x-3)^2}{4}+1\right)} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{\dfrac{(x-3)^2}{2^2}+1}$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{dx}{\left(\dfrac{x-3}{2}\right)^2+1} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{\left(\dfrac{x-3}{2}\right)^2+1},$$

hacemos el cambio de variable

$$u = \frac{x-3}{2}, \qquad\qquad du = \frac{1}{2}\ dx \quad\Longrightarrow\quad 2\ du = dx,$$

de aquí,

$$\int \frac{dx}{x^2-6x+13} = \frac{1}{4}\int \frac{\overbrace{dx}^{\boxed{2\ du}}}{\left(\underbrace{\frac{x-3}{2}}_{\boxed{u}}\right)^2+1} = \overbrace{\frac{1}{4}\int \frac{du}{u^2+1}}^{\boxed{\text{Integral de la arcotangente. Integral más sencilla que la inicial.}}} = \frac{1}{4}\arctan u + C,$$

como $u = \dfrac{x-3}{2}$, se tiene que

$$\int \frac{dx}{x^2-6x+13} = \frac{1}{4}\arctan\left(\frac{x-3}{2}\right) + C$$

★

Ejemplo 21 : *Integre* $\displaystyle\int \frac{x\ dx}{\sqrt{1-x^2}}$

Solución : No debemos confundir esta integral con la primitiva de la función arcoseno, ya que el diferencial está multiplicado por la variable x, así, que haremos el cambio de variable

$$u = 1 - x^2, \qquad du = -2x\ dx \implies -\frac{du}{2} = x\ dx$$

y la integral queda

$$\int \frac{\overbrace{x\ dx}^{\boxed{-du/2}}}{\sqrt{\underbrace{1-x^2}_{\boxed{u}}}} = \int \frac{-du/2}{\sqrt{u}} = -\frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = -\frac{1}{2}\int \frac{du}{u^{1/2}} = -\frac{1}{2}\underbrace{\int u^{-1/2}\ du}_{\boxed{\text{Integral de potencias. Integral más sencilla que la inicial}}} = -\frac{1}{2}\ \frac{u^{1/2}}{1/2} + C = -\sqrt{u} + C$$

como $u = 1 - x^2$, se tiene que

$$\int \frac{x\ dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2} + C$$

★

Ejemplo 22 : *Integre* $\displaystyle\int \sqrt[4]{2p^3x}\ dx$

Solución : En el ejemplo (4) se resolvió esta integral por medio de manipulación algebraica (ver Ejemplo 4), ahora se resolverá usando un cambio de variable.

Proponemos el cambio de variable

$$u = 2p^3x, \qquad du = 2p^3\ dx \implies \frac{du}{2p^3} = dx,$$

la integral nos queda

$$\int \sqrt[4]{\underbrace{2p^3x}_{\uparrow\ \boxed{u}}}\ \underbrace{dx}_{\uparrow\ \boxed{du/2p^3}} = \int \sqrt[4]{u}\ \frac{du}{2p^3} = \frac{1}{2p^3}\int \sqrt[4]{u}\ du = \frac{1}{2p^3}\underbrace{\int u^{1/4}\ du}_{\uparrow\ \boxed{\substack{\text{Integral de una potencia}\\ \text{Integral más sencilla que la inicial}}}} = \frac{1}{2p^3}\ \frac{u^{5/4}}{5/4} + C,$$

como $u = 2p^3x$, entonces,

$$\int \sqrt[4]{2p^3x}\ dx = \frac{1}{2p^3}\ \frac{4}{5}\ \left(2p^3x\right)^{5/4} + C = \frac{2}{5p^3}\ \left(2p^3x\right)^{5/4} + C = \frac{4x}{5}\ \left(2p^3x\right)^{1/4} + C.$$

Finalmente

$$\int \sqrt[4]{2p^3x}\ dx = \frac{4x}{5}\ \left(2p^3x\right)^{1/4} + C.$$

Compare este resultado con el obtenido en el Ejemplo 4. ¿Qué concluye? ★

Ejemplo 23 : *Integre* $\displaystyle\int x\sqrt{x+3}\ dx$

Solución : Hacemos el cambio

$$u = x+3 \qquad \text{de aquí} \qquad x = u-3, \qquad\qquad du = dx$$

y la integral queda

$$\int \overbrace{x}^{\boxed{u-3}\ \downarrow}\ \sqrt{\underbrace{x+3}_{\uparrow\ \boxed{u}}}\ \overbrace{dx}^{\boxed{du}\ \downarrow} = \int (u-3)\sqrt{u}\ du = \underbrace{\int \left(u^{3/2} - 3u^{1/2}\right)\ du}_{\uparrow\ \boxed{\substack{\text{Integral de potencias}\\ \text{Integral más sencilla que la inicial}}}} = \frac{2}{5}\ u^{5/2} - 2u^{3/2} + C$$

como $u = x+3$, se tiene que

$$\int x\sqrt{x+3}\ dx = \frac{2}{5}\ (x+3)^{5/2} - 2\,(x+3)^{3/2} + C$$

★

Ejemplo 24 : *Integre* $\displaystyle\int \frac{x^2\ dx}{\left(x-2\sqrt{x}\right)^4}$

Solución : Hacemos el cambio de variable

$$u^2 = x, \qquad\qquad 2u\ du = dx$$

la integral nos queda

$$\int \frac{x^2\ dx}{\left(x-2\sqrt{x}\right)^4} = \int \frac{\left(u^2\right)^2\ 2u\ du}{\left(u^2-2u\right)^4} = \int \frac{u^4\ 2u\ du}{\left(u\,(u-2)\right)^4} = \int \frac{u^4\ 2u\ du}{u^4\,(u-2)^4} = 2\int \frac{u\ du}{(u-2)^4},$$

hacemos otro cambio de variable

$$p = u - 2 \implies u = p + 2, \qquad\qquad du = dp$$

y obtenemos

$$2\int \frac{u\ du}{(u-2)^4} = 2\int \frac{p+2}{p^4}\ dp = 2\left(\int \frac{p}{p^4}\ dp + \int \frac{2}{p^4}\ dp\right)$$

$$= 2\left(\int p^{-3}\ dp + 2\int p^{-4}\ dp\right) = 2\left(\frac{p^{-2}}{-2} + 2\ \frac{p^{-3}}{-3}\right) = -\frac{1}{p^2} - \frac{4}{3p^3} + C$$

como $p = u - 2$, entonces

$$2\int \frac{u\ du}{(u-2)^4} = -\frac{1}{(u-2)^2} - \frac{4}{3\,(u-2)^3} + C$$

y $u = \sqrt{x}$, entonces

$$\int \frac{x^2\ dx}{(x - 2\sqrt{x})^4} = -\frac{1}{(\sqrt{x}-2)^2} - \frac{4}{3\,(\sqrt{x}-2)^3} + C$$

★

Ejemplo 25 *: Encuentre, en el plano xy, la curva $y = f(x)$ que pasa por el punto $(9,4)$ y cuya pendiente en cada punto es $3\sqrt{x}$.*

Solución : Es conocido que la pendiente de la recta tangente en un punto cualquiera x es $m_{\tan} = f'(x)$, por lo tanto,

$$f'(x) = 3\sqrt{x}$$

para obtener f integramos respecto a x

$$\int f'(x)\ dx = \int 3\sqrt{x}\ dx \implies f(x) = 2x^{3/2} + C,$$

puesto que la función f pasa por el punto $(9,4)$ se tiene que

$$4 = f(9) = 2\,(9)^{3/2} + C \implies 4 = 2\left(3^2\right)^{3/2} + C \implies 2 = 27 + C \implies -25 = C,$$

luego,

$$f(x) = 2x^{3/2} - 25.$$

★

Ejemplo 26 *: En cualquier punto (x,y) de una curva se tiene $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 4 - x^2$ y una ecuación de la recta tangente a la curva en el punto $(1,-1)$ es $2x - 3y = 3$. Encontrar una ecuación de la curva.*

Solución : Tenemos que

$$\int \frac{d^2y}{dx^2}\ dx = \int \left(4 - x^2\right)\ dx \implies \frac{dy}{dx} = 4x - \frac{x^3}{3} + C_1,$$

del hecho que la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto $(1,-1)$ es $2x - 3y = 3$, se tiene que $f'(1) = \dfrac{2}{3}$, por lo tanto,

$$\frac{2}{3} = f'(1) = 4\,(1) - \frac{(1)^3}{3} + C_1 \implies \frac{2}{3} = 4 - \frac{1}{3} + C_1 \implies C_1 = -3$$

entonces,

$$\frac{dy}{dx} = 4x - \frac{x^3}{3} - 3,$$

integramos nuevamente

$$\int \frac{dy}{dx}\ dx = \int \left(4x - \frac{x^3}{3} - 3\right)\ dx \quad \Longrightarrow \quad y = 2x^2 - \frac{x^4}{12} - 3x + C_2,$$

la curva pasa por el punto $(1,-1)$ así,

$$-1 = 2(1) - \frac{(1)^4}{12} - 3(1) + C_2 \quad \Longrightarrow \quad -1 = 2 - \frac{1}{12} - 3 + C_2 \quad \Longrightarrow \quad C_2 = \frac{1}{12},$$

luego

$$y = 2x^2 - \frac{x^4}{12} - 3x + \frac{1}{12}$$

★

Ejemplo 27 *: Se lanza una piedra hacia arriba verticalmente desde el suelo con una velocidad inicial de* 128 *p/seg. Si la única fuerza considerada es la que se le atribuye a la aceleración de la gravedad, encontrar que tan alto llegará la piedra y la velocidad con la que llegará al suelo. Encontrar también cuanto tiempo tomará a la piedra llegar al suelo.*

Solución : La dirección positiva se toma hacia arriba. Sea

- t : el tiempo, en segundos, que ha transcurrido desde que se lanzó la piedra.
- s : la distancia, en pies, de la piedra al suelo a los t seg de tiempo.
- υ : la velocidad, en pies por segundos, de la piedra a los t seg de tiempo.
- $|\upsilon|$: el número de pies por segundo en la rapidez, en pies por segundos, de la piedra a los t seg de tiempo.

La piedra estará en su punto más alto cuando la velocidad sea cero. Sea $\overline{s}$ el valor particular de s cuando $\upsilon = 0$. Cuando la piedra toca el suelo, $s = 0$. Sean $\overline{t}$ y $\overline{\upsilon}$ los valores particulares de t υ cuando $s = 0$ y $t \neq 0$.

La dirección positiva de la piedra desde el punto de partida se toma hacia arriba. Como la única aceleración se debe a la gravedad que actúa en dirección hacia abajo, la aceleración tiene un valor constante de -32 p/seg^2.

Es conocido que la aceleración a es la primera derivada de υ con respecto a t y la segunda derivada de s con respecto a t, es decir

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2} = -32$$

integramos respecto a t

$$\int \frac{d\upsilon}{dt}\ dt = \int \frac{d^2 s}{dt^2}\ dt = \int -32\ dt \quad \Longrightarrow \quad \upsilon(t) = \frac{ds}{dt} = -32t + C_1$$

como $\upsilon = 128$ cuando $t = 0$, tenemos

$$128 = \upsilon(0) = -32(0) + C_1 \quad \Longrightarrow \quad C_1 = 128,$$

por lo tanto,

$$\frac{ds}{dt} = -32t + 128$$

integramos, nuevamente, respecto a t

$$\int \frac{ds}{dt}\ dt = \int (-32t + 128)\ dt \quad \Longrightarrow \quad s(t) = -16t^2 + 128t + C_2,$$

como $s=0$ cuando $t=0$, tenemos

$$0=s(0)=-16(0)^2+128(0)+C_2 \implies C_2=0$$

y nos queda

$$s(t)=-16t^2+128t.$$

La piedra estará en su punto más alto cuando la velocidad sea cero, así,

$$0=v(t)=-32t+128 \implies t=\frac{128}{32}=4,$$

es decir, la piedra tarda 4 seg para llegar a su punto más alto y la distancia es

$$s(4)=-16(4)^2+128(4) \implies s(4)=256,$$

por lo tanto, la mayor altura que la piedra alcanzará es de 256 pies. Para conocer con que velocidad llegará la piedra al suelo igualamos la función distancia a cero, de allí, obtenemos

$$0=s(t)=-16t^2+128t \implies 0=-16t(t-8) \implies t=0 \text{ y } t=8$$

pero el valor $t=0$ corresponde al momento en que es lanzada la piedra, por lo tanto, la piedra llega al piso en 8 seg, luego la velocidad con la que llega es

$$v(8)=-32(8)+128=-128 \implies |v|=128,$$

es decir, la piedra llega al suelo con una rapidez de 128 p/seg. ★

Ejemplo 28 *: Hallar la siguiente suma* $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2$

Solución : Es conocido que

$$(i+1)^3=i^3+3i^2+3i+1 \implies (i+1)^3-i^3=3i^2+3i+1$$

sumando desde $i=1$ hasta $i=n$ obtenemos

$$\sum_{i=1}^{n}\left((i+1)^3-i^3\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(3i^2+3i+1\right),$$

donde

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\left((i+1)^3-i^3\right)&=\Big(\overbrace{(2)^3-(1)^3}^{\boxed{i=1}\,\downarrow}\Big)+\Big(\overbrace{(3)^3-(2)^3}^{\boxed{i=2}\,\downarrow}\Big)+\Big(\overbrace{(4)^3-(3)^3}^{\boxed{i=3}\,\downarrow}\Big)+\cdots+\Big(\overbrace{(n+1)^3-(n)^3}^{\boxed{i=n}\,\downarrow}\Big)\\&=(n+1)^3-1\end{aligned}$$

y

$$\sum_{i=1}^{n}\left(3i^2+3i+1\right)=\sum_{i=1}^{n}3i^2+\sum_{i=1}^{n}3i+\sum_{i=1}^{n}1=3\sum_{i=1}^{n}i^2+3\,\frac{n(n+1)}{2}+n,$$

es decir,

$$(n+1)^3-1=3\sum_{i=1}^{n}i^2+3\,\frac{n(n+1)}{2}+n$$

despejamos $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2$ nos queda

$$3\sum_{i=1}^{n} i^2 = (n+1)^3 - 1 - 3\,\frac{n(n+1)}{2} - n \implies \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{3}\left((n+1)^3 - \frac{3}{2}\,n(n+1) - (n+1)\right),$$

es decir,

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{3}(n+1)\left((n+1)^2 - \frac{3n}{2} - 1\right) \implies \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{(n+1)}{3}\left(\frac{2(n+1)^2 - 3n - 2}{2}\right),$$

por lo tanto,

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{(n+1)}{3}\left(\frac{2n^2+4n+2-3n-2}{2}\right) \implies \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{(n+1)}{3}\left(\frac{2n^2+n}{2}\right)$$

finalmente la suma buscada es

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

★

Ejemplo 29 *: Obtenga el siguiente límite, si existe.*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2$$

Solución : En primer lugar, manipulemos la sumatoria

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\frac{i^2}{n^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{n^3} = \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2,$$

así, por el ejemplo 28 esta suma es

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

por lo tanto,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2},$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+3n+1}{6n^2} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{4n+3}{12n} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

Finalmente

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2 = \frac{1}{3}.$$

★

Ejemplo 30 *: Hallar la siguiente suma* $\displaystyle\sum_{i=5}^{21}(2+i)$

Solución : Es conocido que

$$\sum_{i=1}^{n} k = kn \qquad k = \text{constante} \qquad\qquad \text{y} \qquad\qquad \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

las cuales son validas si la suma comienza desde 1, observemos que la suma que deseamos calcular comienza desde $i=5$, así, debemos reescribir dicha suma de tal forma que comience desde $i=1$,

$$\sum_{i=5}^{21}(2+i) = \sum_{i=1}^{21}(2+i) - \sum_{i=1}^{4}(2+i)$$

donde

$$\sum_{i=1}^{21}(2+i) = \sum_{i=1}^{21} 2 + \sum_{i=1}^{21} i \implies \sum_{i=1}^{21}(2+i) = 2(21) + \frac{(21)(22)}{2} = 42 + 231 = 273,$$

mientras

$$\sum_{i=1}^{4}(2+i) = \sum_{i=1}^{4} 2 + \sum_{i=1}^{4} i \implies \sum_{i=1}^{4}(2+i) = 2(4) + \frac{(4)(5)}{2} = 8 + 10 = 18,$$

entonces

$$\sum_{i=5}^{21}(2+i) = 273 - 18 = 255$$

★

Ejemplo 31 *: Hallar la siguiente suma* $\displaystyle\sum_{i=7}^{n}\left(\frac{1}{i+1}-\frac{1}{i}\right)$

Solución : Observemos que la suma que queremos calcular cumple con la estructura de las sumas telescópica, es decir,

$$\sum_{i=1}^{n}(a_{n+1}-a_n),$$

es la diferencia de dos términos consecutivos, por lo tanto,

$$\sum_{i=7}^{n}\left(\frac{1}{i+1}-\frac{1}{i}\right) = \overbrace{\frac{1}{n+1}}^{\boxed{\substack{\text{Término mayor}\\ \text{evaluado en } i=n}}} - \overbrace{\frac{1}{7}}^{\boxed{\substack{\text{Término menor}\\ \text{evaluado en } i=7}}}$$

★

Ejemplo 32 *: Hallar la siguiente suma* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{3}{k(k+3)}$

Solución : Veamos si podemos escribir es suma como una suma telescópica, para ello, descomponemos la expresión en sus fracciones simples, es decir

$$\frac{3}{k(k+3)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+3},$$

donde, A y B son constantes a determinar por medio del método de los coeficientes indeterminados.

$$\frac{3}{k(k+3)} = \frac{A(k+3)+Bk}{k(k+3)} \qquad \Longrightarrow \qquad 3 = A(k+3)+Bk,$$

debemos encontrar valores de A y de B para que la igualdad anterior se cumpla. Le damos valores arbitrario a k para obtener dichas constantes.

Si $k=0$, entonces, $3 = A((0)+3)+B(0) \implies A = 1.$

Si $k=-3$, entonces, $3 = A((-3)+3)+B(-3) \implies B = -1.$

Por lo tanto,

$$\frac{3}{k(k+3)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+3},$$

así,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{3}{k(k+3)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+3} \right)$$

observemos que la nueva forma de escribir la suma nos lleva a la diferencia de dos términos, pero dichos términos **no** son consecutivos, por lo tanto, no representa una suma telescópica.

Si sumamos y restamos los términos $\dfrac{1}{k+1}$ y $\dfrac{1}{k+2}$ obtenemos

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{3}{k(k+3)} &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3} \right) \\ &= \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)}_{\uparrow} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right)}_{\uparrow} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3} \right)}_{\uparrow}\end{aligned}$$

Diferencia de términos consecutivos, representa una suma telescópica

donde,

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \overbrace{\frac{1}{1}}^{\substack{\text{Término menor} \\ \text{evaluado en } k=1 \\ \downarrow}} - \overbrace{\frac{1}{n+1}}^{\substack{\text{Término mayor} \\ \text{evaluado en } k=n \\ \downarrow}}$$

similarmente

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \qquad \text{y} \qquad \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3} \right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{n+3},$$

por lo tanto,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{3}{k(k+3)} = 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+3},$$

es decir,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{3}{k(k+3)} = \frac{11}{6} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}.$$

★

Ejemplo 33 : *Demuestre que* $1+2+3+4+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

Demostración : Usando inducción matemática, demostremos, en primer lugar, que la igualdad se cumple para $n=1$, así,

$$1 \stackrel{?}{=} \frac{(1)((1)+1)}{2} \quad \Longrightarrow \quad 1 \stackrel{?}{=} \frac{(1)(2)}{2} \quad \Longrightarrow \quad 1=1 \quad \text{se cumple}$$

Hipótesis inductiva : Supongamos que se cumple para $n=h$, es decir, la siguiente igualdad es cierta

$$1+2+3+4+\cdots+h=\frac{h(h+1)}{2}.$$

Tesis inductiva : Demostremos que se cumple la igualdad para $n=h+1$, es decir, debemos verificar que la siguiente igualdad es cierta

$$1+2+3+4+\cdots+h+\overbrace{(h+1)}^{\boxed{\text{Nuevo término en la suma}}} \stackrel{?}{=} \frac{(h+1)((h+1)+1)}{2}.$$

así, por hipótesis inductiva

$$\overbrace{1+2+3+4+\cdots+h}^{\boxed{\text{Hipótesis Inductiva}}}+(h+1)=\frac{h(h+1)}{2}+(h+1)=\frac{h(h+1)+2(h+1)}{2}$$

$$=\frac{(h+1)(h+2)}{2}=\frac{(h+1)((h+1)+1)}{2}.$$

por lo tanto

$$1+2+3+4+\cdots+h+(h+1)=\frac{(h+1)((h+1)+1)}{2} \qquad \text{se cumple}$$

entonces, queda demostrado que

$$1+2+3+4+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

★

Ejemplo 34 : *Demuestre que* $\dfrac{1}{1\cdot 4}+\dfrac{1}{4\cdot 7}+\dfrac{1}{7\cdot 10}+\cdots+\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\dfrac{n}{3n+1}.$

Demostración : Usando inducción matemática, demostremos, en primer lugar, que la igualdad se cumple para $n=1$, así,

$$\frac{1}{(3(1)-2)(3(1)+1)} \stackrel{?}{=} \frac{(1)}{3(1)+1} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{1\cdot 4} \stackrel{?}{=} \frac{1}{4} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{4}=\frac{1}{4} \quad \text{se cumple}$$

Hipótesis inductiva : Supongamos que se cumple para $n=h$, es decir, la siguiente igualdad es cierta

$$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\cdots+\frac{1}{(3h-2)(3h+1)}=\frac{h}{3h+1}.$$

Tesis inductiva : Demostremos que se cumple la igualdad para $n=h+1$, es decir, debemos verificar que la siguiente igualdad es cierta

$$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\cdots+\frac{1}{(3h-2)(3h+1)}+\overbrace{\frac{1}{(3(h+1)-2)(3(h+1)+1)}}^{\boxed{\text{Nuevo término en la suma}}} \stackrel{?}{=} \frac{(h+1)}{3(h+1)+1}.$$

así, por hipótesis inductiva

$$\overbrace{\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\cdots+\frac{1}{(3h-2)\,(3h+1)}}^{\boxed{\text{Hipótesis Inductiva}}\ \downarrow}+\frac{1}{(3\,(h+1)-2)\,(3\,(h+1)+1)}$$

$$=\frac{h}{3h+1}+\frac{1}{(3\,(h+1)-2)\,(3\,(h+1)+1)}$$

$$=\frac{h\,(3\,(h+1)+1)+1}{(3\,(h+1)-2)\,(3\,(h+1)+1)}=\frac{h\,(3h+4)+1}{(3\,(h+1)-2)\,(3\,(h+1)+1)}$$

$$=\frac{(h+1)\,(3h+1)}{(3\,(h+1)-2)\,(3\,(h+1)+1)}=\frac{(h+1)}{3\,(h+1)+1},$$

por lo tanto,

$$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\cdots+\frac{1}{(3h-2)\,(3h+1)}+\frac{1}{(3\,(h+1)-2)\,(3\,(h+1)+1)}=\frac{(h+1)}{3\,(h+1)+1}$$

se cumple la igualdad, entonces, queda demostrado que

$$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)\,(3n+1)}=\frac{n}{3n+1}$$

★

Ejercicios de aula

1. Defina antiderivada (primitiva) de una función.
2. Calcular las siguientes integrales

   1. $\displaystyle\int \frac{x^3-8}{x-2}\,dx$ 2. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} 4t\ dt}{\cos 2t\cos t}$ 3. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[5]{x^3}\,(x-1)}{\sqrt[3]{x}-1}\,dx$ 4. $\displaystyle\int \operatorname{sen} x\sqrt[3]{3-\cos x}\ dx$

   5. $\displaystyle\int \frac{x\ dx}{\sqrt{1-x^4}}$ 6. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+6x+10}$

3. El punto $(3,2)$ está en una curva y en cualquier punto (x,y) de la curva, la recta tangente tiene una pendiente igual a $2x-3$. Encontrar una ecuación de la curva.
4. Obtenga el límite indicado, si existen.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\left(\frac{i}{n}\right)^3+1\right)$$

5. Indique los pasos a seguir en el Método de Inducción Matemática.
6. Demuestre que la suma de los cubos de los n primeros números naturales es igual a $\left[\dfrac{n\,(n+1)}{2}\right]^2$.

1. Demuestre que si $f(x) = \arctan x$, entonces $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

2. Suponga que

$$f(x) = \frac{d}{dx}\left(1 - \sqrt{x}\right) \qquad \text{y} \qquad g(x) = \frac{d}{dx}(x+2)$$

Encuentre

1. $\displaystyle\int f(x)\ dx$ 2. $\displaystyle\int 2g(x)\ dx$ 3. $\displaystyle\int (-f(x))\ dx$ 4. $\displaystyle\int (f(x) + g(x))\ dx$

3. Hallar las primitivas de las siguientes funciones

1. $\displaystyle\int dx$ 2. $\displaystyle\int m\ dx$ 3. $\displaystyle\int x\ dx$ 4. $\displaystyle\int x^2\ dx$ 5. $\displaystyle\int x^3\ dx$

6. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}}\ dx$ 7. $\displaystyle\int \sqrt{x}\ dx$ 8. $\displaystyle\int \sqrt[3]{x}\ dx$ 9. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\ dx$ 10. $\displaystyle\int \sqrt[3]{x^5}\ dx$

11. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[5]{x^4}}\ dx$ 12. $\displaystyle\int x^n\ dx$ 13. $\displaystyle\int \cos x\ dx$ 14. $\displaystyle\int \operatorname{sen} x\ dx$ 15. $\displaystyle\int \sec^2 x\ dx$

16. $\displaystyle\int \sec x \tan x\ dx$ 17. $\displaystyle\int \csc x \cot x\ dx$ 18. $\displaystyle\int \csc^2 x\ dx$ 19. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2}$

20. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

4. Con los resultados obtenidos en el ejercicio 3 completar la siguiente tabla

Tabla de integrales básicas	
$\displaystyle\int k\ dx =$, $k =$ constante	$\displaystyle\int x^n\ dx =$, para $n \neq -1$
$\displaystyle\int \operatorname{sen} x\ dx =$	$\displaystyle\int \cos x\ dx =$
$\displaystyle\int \sec^2 x\ dx =$	$\displaystyle\int \csc^2 x\ dx =$
$\displaystyle\int \sec x \tan x\ dx =$	$\displaystyle\int \csc x \cot x\ dx =$
$\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\ dx =$	$\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ dx =$

5. Hallar una función f, tal que se cumpla la siguiente igualdad

1. $\displaystyle\int f(x)\,dx = x + C$ 2. $\displaystyle\int f(x)\,dx = mx + C$ 3. $\displaystyle\int f(x)\,dx = \frac{x^2}{2} + C$

4. $\displaystyle\int f(x)\,dx = \frac{x^3}{3} + C$ 5. $\displaystyle\int f(x)\,dx = \frac{x^4}{4} + C$ 6. $\displaystyle\int f(x)\,dx = 2\sqrt{x} + C$

7. $\displaystyle\int f(x)\,dx = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + C$ 8. $\displaystyle\int f(x)\,dx = \frac{3\sqrt[3]{x^4}}{4} + C$ 9. $\displaystyle\int f(x)\,dx = \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{2} + C$

6. Calcular las siguientes integrales por manipulación algebraica

1. $\displaystyle\int 6\ dx$ 2. $\displaystyle\int \pi^3\ dx$ 3. $\displaystyle\int -2^{-5}\ dx$ 4. $\displaystyle\int x^{-2}\ dx$ 5. $\displaystyle\int \sqrt{x}\ dx$

6. $\displaystyle\int \frac{b^2}{p^3}\ db$ 7. $\displaystyle\int \frac{x}{p^2}\ dx$ 8. $\displaystyle\int \frac{a}{xp^2}\ dp$ 9. $\displaystyle\int \sec^2\theta\ d\theta$ 10. $\displaystyle\int \csc^2\theta\ d\theta$

11. $\displaystyle\int \left(\sqrt[5]{x^2} - \frac{1}{x^3}\right)\ dx$ 12. $\displaystyle\int \left(y^9 - 2y^5 + 3y\right)\ dy$ 13. $\displaystyle\int \left(x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}\right)\ dx$

14. $\displaystyle\int \left(y^2 + 4y\right)^2 dy$ 15. $\displaystyle\int \left(a + bt^3\right)^2 dt$ 16. $\displaystyle\int \left(a + bt^3\right)^2 da$ 17. $\displaystyle\int (x+1)^3\,dx$

18. $\displaystyle\int \frac{\left(t^2+1\right)\left(t^2-2\right)}{\sqrt[3]{t^2}}\ dt$ 19. $\displaystyle\int (at)^{1/n}\,dt$ 20. $\displaystyle\int (nx)^{\frac{1-n}{n}}\ dx$ 21. $\displaystyle\int \frac{x^4-1}{x^2+1}\ dx$

22. $\displaystyle\int \frac{\cos^2 x}{1+\operatorname{sen} x}\ dx$ 23. $\displaystyle\int \frac{\cos 2t}{\operatorname{sen}^2 t}dt$ 24. $\displaystyle\int \frac{\cos 2x\ dx}{1-\sqrt{2}\cos x}$ 25. $\displaystyle\int \cos^2\left(\frac{t}{2}\right)\,dt$

26. $\displaystyle\int \frac{5x + 8x^2 - 3x^3 - 6}{x^5 - 3x^4}\ dx$ 27. $\displaystyle\int \frac{2\operatorname{sen}^2 x + 5\operatorname{sen} x - 3}{\operatorname{sen} x + 3}\ dx$ 28. $\displaystyle\int \frac{(x-1)^2\ dx}{\sqrt[4]{x^3}\left(\sqrt[3]{x}-1\right)}$

29. $\displaystyle\int \frac{\cos^2(\operatorname{arcsen} x) - 7}{x^5}\ dx$ 30. $\displaystyle\int \frac{\sec^4(\arctan x)}{\operatorname{sen}^2(\arctan x^2)}$

7. Calcular las siguientes integrales utilizando el método de la u-sustitución

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[4]{5x}}$ 2. $\displaystyle\int (3-t)^2\ dt$ 3. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x\cos x\ dx$ 4. $\displaystyle\int \cos^{-2/3}(bx)\operatorname{sen}(bx)\ dx$

5. $\displaystyle\int \cos^2 t\ dt$ 6. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 x\ dx$ 7. $\displaystyle\int (3x+5)^6\ dx$ 8. $\displaystyle\int \tan^{2/3}(ax)\sec^2(ax)\ dx$

9. $\displaystyle\int \frac{x\ dx}{\sqrt{1-x^2}}$ 10. $\displaystyle\int \frac{\tan^3 t}{\cos^2 t}\ dt$ 11. $\displaystyle\int x\sqrt{4-x}\ dx$ 12. $\displaystyle\int \operatorname{sen}(2\cos x)\operatorname{sen} x\ dx$

13. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$ 14. $\displaystyle\int \frac{x^3\ dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ 15. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{1-t}}{\sqrt{1-t}}\ dt$ 16. $\displaystyle\int \frac{3-\sqrt{\arctan 2x}}{1+4x^2}\ dx$

17. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^5 t\ dt$ 18. $\displaystyle\int \cos^3(2t)\,dt$ 19. $\displaystyle\int t^2\sqrt{3t+2}\ dt$ 20. $\displaystyle\int x\operatorname{sen}\left(1-x^2\right)\ dx$

21. $\displaystyle\int \frac{x^5\ dx}{\sqrt{x^2-3}}$ 22. $\displaystyle\int \frac{x^7\ dx}{\sqrt{x^4-1}}$ 23. $\displaystyle\int \frac{dx}{9x^2-6x+2}$ 24. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4x-4x^2+3}}$

25. $\displaystyle\int \frac{x\ dx}{\sqrt{2x^2-x^4}}$ 26. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{2x-1}}$ 27. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} 2x\ dx}{\left(1+\operatorname{sen}^2 x\right)^2}$ 28. $\displaystyle\int \frac{\tan^3(1-2t)}{\cos(1-2t)}\ dt$

29. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{6x-9x^2}}$ 30. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{2-5\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\ dx$ 31. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x\ dx}{4\cos^2 x - 4\cos x + 17}$

8. Encuentre, en el plano xy, la curva $y = f(x)$ que pasa por el punto $(1, 2)$ y cuya pendiente en cada punto es $4x^2$.

9. Encuentre una función $y = f(x)$, tal que, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{2+3x}{4x^{3/2}}$, f tenga un mínimo relativo en $\left(\dfrac{2}{3}, -\dfrac{4}{3}\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)$.

10. Si los frenos de un carro pueden darle una aceleración negativa constante de 20 p/seg^2. ¿Cuál es la velocidad máxima a que puede ir si es necesario parar el carro dentro de 80 p después de aplicados los frenos?

11. Demuestre que $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$.

12. Demuestre que $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n = \dfrac{x^{n+1}-1}{x-1}$, con $x \neq 1$.

13. Demuestre que $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + (n-1) \cdot n = \dfrac{n(n-1)(n+1)}{3}$.

14. Demuestre que $\dfrac{1}{1 \cdot 5} + \dfrac{1}{5 \cdot 9} + \dfrac{1}{9 \cdot 13} + \cdots + \dfrac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \dfrac{n}{4n+1}$.

15. Demuestre que la suma de los cubos de tres números naturales sucesivos es divisible por 9.

16. Demuestre que

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$$

17. Desarrolle las siguientes sumas

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{9} (i+2)^2$ 2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} \frac{k}{k+3}$ 3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{6} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$

18. Exprese en notación sigma la suma dada

1. $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots + 10$ 2. $\sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5} + \sqrt{6} + \sqrt{7}$ 3. $\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{3} + \dfrac{3}{4} + \dfrac{4}{5} + \cdots + \dfrac{19}{20}$

4. $\dfrac{1}{7} + \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{11} + \cdots + \dfrac{1}{49}$ 5. $1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n$

19. Hallar las siguientes sumas

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i$ 2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2$ 3. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3$ 4. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^4$

20. Hallar las siguientes sumas usando los resultados obtenidos en el ejercicio 19

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (3i-2)$ 2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (2i^2+i)$ 3. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (2-i)^3$ 4. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left(i^2 - \frac{3}{2}\right)$

21. Calcular las siguientes sumas

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2i-1} - \frac{1}{2i+1}\right)$ 2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{2}{i^2+4i+3}$ 3. $\displaystyle\sum_{i=2}^{n} \frac{2}{i^2-1}$

22. Demuestre que $\displaystyle\sum_{k=3}^{10} (2k-5)$ y $\displaystyle\sum_{j=0}^{7} (2j+1)$ son iguales.

23. Obtenga los límites indicados, si existen.

1. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{3}{n}\left(\left(1+\frac{3i}{n}\right)^3-2\left(1+\frac{3i}{n}\right)\right)$ 2. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{n}\left(\left(\frac{2i}{n}\right)^3+5\left(\frac{2i}{n}\right)\right)$

24. Demostrar que

$$\sum_{i=1}^{n}\left(F\left(i+1\right)-F\left(i-1\right)\right)=F\left(n+1\right)+F\left(n\right)-F\left(1\right)-F\left(0\right).$$

25. Considere el cociente

$$\frac{1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+n^2}{1+2+3+\cdots n}.$$

Hallar el valor del cociente para cualquier entero positivo n.

Ejercicios propuestos

1. Demuestre que si $f\left(x\right)=\arccos x$, entonces $f'\left(x\right)=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, con $-1<x<1$.

2. Demuestre que si $f\left(x\right)=\sec^{-1}x$, entonces $f'\left(x\right)=\dfrac{1}{\left|x\right|\sqrt{x^2-1}}$, con $\left|x\right|>1$.

3. Suponga que

$$f\left(x\right)=\frac{d}{dx}\left(1-\sqrt{x}\right) \qquad \text{y} \qquad g\left(x\right)=\frac{d}{dx}\left(x+2\right)$$

Encuentre

1. $\displaystyle\int g\left(x\right)\ dx$ 2. $\displaystyle\int\frac{f\left(x\right)}{4}\ dx$ 3. $\displaystyle\int\left(f\left(x\right)-g\left(x\right)\right)\ dx$ 4. $\displaystyle\int\left(-5g\left(x\right)\right)\ dx$

4. Hallar una función f, tal que se cumpla la siguiente igualdad

1. $\displaystyle\int f\left(x\right)dx=\frac{2}{\sqrt{x}}+C$ 2. $\displaystyle\int f\left(x\right)dx=\frac{\sqrt[3]{x}}{3}+C$ 3. $\displaystyle\int f\left(x\right)dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$

4. $\displaystyle\int f\left(x\right)dx=\operatorname{sen}x+C$ 5. $\displaystyle\int f\left(x\right)dx=-\cos x+C$ 6. $\displaystyle\int f\left(x\right)dx=\tan x+C$

7. $\displaystyle\int f\left(x\right)dx=\sec x+C$ 8. $\displaystyle\int f\left(x\right)dx=-\csc x+C$ 9. $\displaystyle\int f\left(x\right)dx=-\cot x+C$

10. $\displaystyle\int f\left(x\right)dx=\arctan x+C$ 11. $\displaystyle\int f\left(x\right)dx=\operatorname{arcsen}x+C$ 12. $\displaystyle\int f\left(t\right)dt=\frac{\sec^2 t}{2}+C$

13. $\displaystyle\int f\left(t\right)dt=\arctan\left(t^2\right)+C$ 14. $\displaystyle\int f\left(x\right)dx=\frac{\sec^3 x}{3}+C$ 15. $\displaystyle\int f\left(t\right)dt=\frac{\tan^2 t}{2}+C$

5. Calcular las siguientes integrales usando manipulación algebraica

1. $\displaystyle\int 7\ dx$ 2. $\displaystyle\int\frac{\pi}{3}\ dx$ 3. $\displaystyle\int 3^{-2}\ dx$ 4. $\displaystyle\int\sqrt[5]{x^3}\ dx$ 5. $\displaystyle\int\frac{4}{\sqrt[3]{x^2}}\ dx$

6. $\displaystyle\int x^{3/7}\ dx$ 7. $\displaystyle\int\frac{2}{x^6}\ dx$ 8. $\displaystyle\int\frac{3}{t^4}\ dt$ 9. $\displaystyle\int\sqrt[3]{\omega}\ d\omega$ 10. $\displaystyle\int\frac{dw}{w^2}$

11. $\displaystyle\int\frac{\sqrt{2}}{t^3}\ dt$ 12. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt[n]{x}}$ 13. $\displaystyle\int 5a^2x^6\ dx$ 14. $\displaystyle\int 5a^2x^6\ da$ 15. $\displaystyle\int\frac{b^3}{p^3}\ dp$

16. $\displaystyle\int\left(3x-5\right)\ dx$ 17. $\displaystyle\int\left(3x-\sqrt{x}\right)\ dx$ 18. $\displaystyle\int\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t^4}\right)\ dt$ 19. $\displaystyle\int\left(\sqrt{t}-\frac{2}{\sqrt{t}}\right)\ dt$

20. $\displaystyle\int \left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{r}}\right)\, dr$ 21. $\displaystyle\int \left(\sqrt[4]{t^5} + \sqrt[5]{t^4}\right)\, dt$ 22. $\displaystyle\int (\cos x - 2\operatorname{sen} x)\, dx$

23. $\displaystyle\int (2x + \operatorname{sen} x)\, dx$ 24. $\displaystyle\int (2x + \sec x \tan x)\, dx$ 25. $\displaystyle\int (\cos\theta + 2\operatorname{sen}\theta)\, d\theta$

26. $\displaystyle\int \left(3t^2 - 2\operatorname{sen} t\right)\, dt$ 27. $\displaystyle\int (3\operatorname{sen} t - 2\cos t)\, dt$ 28. $\displaystyle\int \left(x^{4/3} - 2x^{1/3}\right)\, dx$

29. $\displaystyle\int \left(5t^2 - 4t + 3\right)\, dt$ 30. $\displaystyle\int \left(1 - 2x - 3x^2\right)\, dx$ 31. $\displaystyle\int \left(5y^4 - 5y^2 + 14\right)\, dy$

32. $\displaystyle\int y^2\left(y^2 - 3\right)\, dy$ 33. $\displaystyle\int u\left(\sqrt{u} + \sqrt[3]{u}\right)\, du$ 34. $\displaystyle\int \sqrt{x}\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)\, dx$

35. $\displaystyle\int x\sqrt{x}\, dx$ 36. $\displaystyle\int y\left(\sqrt{y} + \sqrt[3]{y} - 2\right)\, dy$ 37. $\displaystyle\int (x-1)(3x+2)\, dx$

38. $\displaystyle\int \left(\sqrt{x} + 1\right)\left(x - \sqrt{x} + 1\right)\, dx$ 39. $\displaystyle\int x(x+a)(x+b)\, dx$ 40. $\displaystyle\int \frac{t^6 - t^2}{t^4}\, dt$

41. $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{\sqrt{x}}\, dx$ 42. $\displaystyle\int \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2}}\, dx$ 43. $\displaystyle\int \frac{s^4-8}{s^2}\, ds$ 44. $\displaystyle\int \frac{x + \sqrt[3]{x^4}}{\sqrt{x}}\, dx$

45. $\displaystyle\int \frac{4x^6 + 3x^5 - 8}{x^5}\, dx$ 46. $\displaystyle\int \frac{x^3 - 3x^2 + 1}{\sqrt{x}}\, dx$ 47. $\displaystyle\int \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{x^2}\, dx$

48. $\displaystyle\int \left(x^2+1\right)^2 dx$ 49. $\displaystyle\int \left(x^3-1\right)^2 dx$ 50. $\displaystyle\int \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 dx$ 51. $\displaystyle\int \left(2 - \sqrt{t}\right)^2 dt$

52. $\displaystyle\int \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt[5]{t^2}}\right)^3 dt$ 53. $\displaystyle\int x\left(x^2+1\right)^3 dx$ 54. $\displaystyle\int \frac{\left(x^m - x^n\right)^2}{\sqrt{x}}\, dx$

55. $\displaystyle\int \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{x+1}\, dx$ 56. $\displaystyle\int \frac{x^2-4}{x-2}\, dx$ 57. $\displaystyle\int \frac{x^3-1}{x-1}\, dx$ 58. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} 2t}{\operatorname{sen} t} dt$

59. $\displaystyle\int \frac{\cos 2t}{\cos t}\, dt$ 60. $\displaystyle\int \frac{\cos 2x\, dx}{\cos x - \operatorname{sen} x}$ 61. $\displaystyle\int \frac{\cos 2t\, dt}{\cos t + \operatorname{sen} t}$ 62. $\displaystyle\int \frac{(\operatorname{sen} t + \cos t)^2}{\operatorname{sen} t}\, dt$

63. $\displaystyle\int \left(\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t\right) dt$ 64. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^4 x - \cos^4 x - \operatorname{sen}^2 x}$ 65. $\displaystyle\int \frac{5\sqrt[3]{x^2} - 3x\sqrt[3]{x} + 2}{\sqrt{2} - \sqrt[3]{x}}\, dx$

66. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[5]{x^3}\,(x-1)}{\sqrt{x}-1}\, dx$

6. Encuentre, en el plano xy, la curva $y = f(x)$ que pasa por el punto $(1,5)$ y cuya pendiente en cada punto es $\dfrac{-4}{x^2}$.

7. Encuentre una función $y = f(x)$, tal que, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{1}{4x^{3/2}} - \dfrac{1}{x^2}$, f tenga un punto estacionario en $x = 4$ y pase por el punto $(1,-1)$.

8. Los puntos $(-1,3)$ y $(0,2)$ están en una curva y en cualquier punto (x,y) de la curva, se tiene $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 2 - 4x$. Encontrar una ecuación de la curva.

9. Una ecuación de la recta tangente a una curva en el punto $(1,3)$ es $y = x + 2$. Si en cualquier punto (x,y) de la curva se tiene $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 6x$, encontrar una ecuación de la curva.

10. En cualquier punto (x, y) de una curva se tiene $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 1 - x^2$ y una ecuación de la recta tangente a la curva en el punto $(1, 1)$ es $y = 2 - x$. Encontrar una ecuación de la curva.

11. En cualquier punto (x, y) de una curva se tiene $\dfrac{d^3y}{dx^3} = 2$ y $(1, 3)$ es un punto de inflexión en el que la pendiente de la tangente de inflexión es -2. Encontrar una ecuación de la curva.

12. La pendiente de la recta tangente en cualquier punto (x, y) de una curva es $10 - 4x$ y el punto $(1, -1)$ está en la curva. Encontrar una ecuación de la curva.

13. Una partírcula se mueve en linea recta, s es la distancia dirigida de la partírcula desde el origen en t seg de tiempo, v es la velocidad en p/seg de la partícula en t seg y a es la aceleración en p/seg^2 de la partícula en t seg. Si $a = 2t - 1$, $v = 3$ y $s = 4$ cuando $t = 1$, expresar v y s como funciones de t.

14. En los siguientes ejercicios la única fuerza considerada es la debida a la aceleración de la gravedad que tomamos como 32 p/seg^2 en la dirección hacia abajo.

    (a) Una piedra se lanza verticalmente hacia arriba desde el suelo, con una velocidad inicial de 20 p/seg.

        i. ¿Cuánto tiempo le tomará llegar al suelo y con qué velocidad llegará?

        ii. ¿Durante cuánto tiempo estará subiendo la piedra y que tan alto llegará?

    (b) Un hombre en un globo suelta sus binoculares cuando se encuentra a 150 p de altura y está subiendo a razón de 10 p/seg. ¿Cuánto tiempo tardarán los binoculares en llegar a suelo y cuál es su velocidad de impacto?

15. Si el conductor de un automóvil desea aumentar su rapidez de 20 mi/h a 50 mi/h mientras recorre una distancia de 528 p. ¿cuál es la aceleración constante que debe mantener?

16. Si se aplican los frenos de un carro viajando a 50 mi/h y si los frenos pueden dar al carro una aceleración negativa constante de 20 p/seg^2. ¿Cuánto tardará el coche en detenerse? ¿Qué distancia recorrerá antes de parar?

17. Calcular las siguientes integrales utilizando el método de la u-sustitución

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{4 + x^2}$	2. $\displaystyle\int \frac{x\ dx}{(x+1)^4}$	3. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\tan t}}{1 - \operatorname{sen}^2 t}\ dt$	4. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} z \cos z}{\sqrt{\cos^2 z - \operatorname{sen}^2 z}}\ dz$
5. $\displaystyle\int \sqrt{2pt}\ dt$	6. $\displaystyle\int \cos^5(2t)\ dt$	7. $\displaystyle\int t^2\sqrt{5t-2}\ dt$	8. $\displaystyle\int \sqrt{1 + 3\cos^2 x}\operatorname{sen} 2x\ dx$
9. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x}\ dx}{\sqrt{2 - \sqrt[3]{x}}}$	10. $\displaystyle\int \frac{2t^2 + t}{(t+1)^5}\ dt$	11. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 x \cos x\ dx$	12. $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x\ dx}{(3\operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^3 x + 5)^2}$
13. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x\ dx$	14. $\displaystyle\int t\sqrt{2t-1}\ dt$	15. $\displaystyle\int \operatorname{sen}(1-2t)\ dt$	16. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^5 6x \cos 6x\ dx$
17. $\displaystyle\int \frac{x^2\ dx}{\sqrt[3]{x^3+1}}$	18. $\displaystyle\int \frac{x^2 - 3}{\sqrt[3]{1-x}}\ dx$	19. $\displaystyle\int t^2\sqrt{4-t}\ dt$	20. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(4t-1)\ dt}{1 - \operatorname{sen}^2(4t-1)}$
21. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{5 - x^2}}$	22. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{5x-2}}$	23. $\displaystyle\int \frac{x^3 - 3x^2}{\sqrt[3]{4-x}}\ dx$	24. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^2(\arctan x)}{x^2+1}\ dx$
25. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}\ dx}{\sqrt[3]{\sqrt{x}+3}}$	26. $\displaystyle\int \cos(6x)\ dx$	27. $\displaystyle\int \sqrt{a - bx}\ dx$	28. $\displaystyle\int (\cos ax + \operatorname{sen} ax)^2\ dx$
29. $\displaystyle\int \frac{x\ dx}{\sqrt{x^2+1}}$	30. $\displaystyle\int \frac{\cos x\ dx}{1 + \operatorname{sen}^2 x}$	31. $\displaystyle\int \frac{1 + \cos 2x}{\operatorname{sen}^2 2x}\ dx$	32. $\displaystyle\int \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{T} - \phi_0\right)\ dx$

33. $\displaystyle\int \frac{dx}{7+x^2}$ 34. $\displaystyle\int \frac{\sec^2 t\ dt}{\sqrt{1-\tan^2 t}}$ 35. $\displaystyle\int \frac{\sec^2 \sqrt{t-1}}{\sqrt{t-1}}\ dt$ 36. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arcsen} t + t}{\sqrt{1-t^2}}\ dt$

37. $\displaystyle\int \frac{x\ dx}{1+x^4}$ 38. $\displaystyle\int \frac{x^2\ dx}{\sqrt{25-x^6}}$ 39. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{\operatorname{arcsen} t}{1-t^2}}\ dt$ 40. $\displaystyle\int \cos\left(\frac{x}{a}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{x}{a}\right)\ dx$

41. $\displaystyle\int \frac{x^5\ dx}{\sqrt[3]{x^2+1}}$ 42. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x\ dx}{\cos^2 x + 1}$ 43. $\displaystyle\int \frac{\cot^5(2-t)}{\operatorname{sen}(2-t)}\ dt$ 44. $\displaystyle\int \frac{\sec x \tan x}{\sqrt{\sec x + 1}}\ dx$

45. $\displaystyle\int \sqrt[3]{4+5\cos^2 x}\ \operatorname{sen} 2x\ dx$ 46. $\displaystyle\int \sqrt{\tan x \operatorname{sen} x}\ dx$ 47. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}$

48. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} 2x\ dx}{\sqrt[4]{2-\operatorname{sen} x}}$ 49. $\displaystyle\int \frac{dx}{\left(3-x^{1/3}\right)^5}$ 50. $\displaystyle\int \frac{dx}{4x^2-4x+17}$ 51. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^4(at)\ dt$

52. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{1+\operatorname{sen} 2x}\ dx$ 53. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x\ dx}{\sqrt{\cos x - \cos^2 x}}$ 54. $\displaystyle\int \tan^{5/2} x \sec^2 x\ dx$

18. Demuestre que la suma de los cuadrados de los n primeros números naturales es igual a $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

19. Demuestre que $1-2^2+3^2-4^2+\cdots+(-1)^{n-1}n^2 = (-1)^{n-1}\dfrac{n(n+1)}{2}$.

20. Demuestre que $1\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 4 + 3\cdot 4\cdot 5 + \cdots + n\cdot(n+1)\cdot(n+2) = \dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$.

21. Demuestre que $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{n}{2n+1}$.

22. Demuestre que $\dfrac{1^2}{1\cdot 3}+\dfrac{2^2}{3\cdot 5}+\dfrac{3^2}{5\cdot 7}+\cdots+\dfrac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{n(n+1)}{2(2n+1)}$.

23. Demuestre que $\dfrac{1}{a(a+1)}+\dfrac{1}{(a+1)(a+2)}+\dfrac{1}{(a+2)(a+3)}+\cdots+\dfrac{1}{(a+n-1)(a+n)} = \dfrac{n}{a(a+n)}$.

24. Demuestre que si $u_0 = 2$ y $u_1 = 3$ y si $u_{k+1} = 3u_k - 2u_{k-1}$, para todo número natural k, se tiene

$$u_n = 2^n + 1.$$

25. Demuestre que si

$$u_1 = \frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha-\beta} \qquad \text{y} \qquad u_2 = \frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha-\beta}$$

y si

$$u_k = (\alpha+\beta)\,u_{k-1} - \alpha\beta u_{k-2},$$

para todo número natural $k>2$, se tiene

$$u_n = \frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}.$$

26. Demuestre que la suma

$$A_n = 11^{n+2} + 12^{2n+1}$$

es divisible por 133 cualquiera que sea el número entero $n \geq 0$.

27. Demuestre que $n^2 - n$ es divisible por 6.

28. Demuestre que $1^4+2^4+3^4+4^4+\cdots n^4 = \dfrac{n(n+1)\left(6n^3+9n^2+n-1\right)}{30}$.

29. Determine el primer entero N para el cual sea verdadera la proposición para cada $n \geq N$ y luego demuestre la proposicón para cada $n \geq N$.

1. $3n + 25 < 3^n$ 2. $2^n > 2n + 1$ 3. $n^2 \leq 2^n$

30. Desarrolle las siguientes sumas

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{10} \sqrt{n}$ 2. $\displaystyle\sum_{i=2}^{8} \frac{i}{i-1}$ 3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{6} 2^{-n}$ 4. $\displaystyle\sum_{i=4}^{10} \frac{i}{i^2-1}$

31. Exprese en notación sigma la suma dada

1. $\dfrac{3}{7} + \dfrac{4}{8} + \dfrac{5}{9} + \dfrac{6}{10} + \cdots + \dfrac{23}{27}$ 2. $2 + 4 + 6 + 8 + \cdots + 2n$ 3. $1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n-1)$

4. $1 + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{25} + \dfrac{1}{36}$ 5. $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32$ 6. $x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^n$

32. Hallar las siguientes sumas usando los resultados obtenidos en el ejercicio 19 de la sección de Ejercicios

1. $\displaystyle\sum_{i=3}^{12} (3-2i)^2$ 2. $\displaystyle\sum_{i=7}^{n} \left(4i - i^2\right)^2$ 3. $\displaystyle\sum_{i=10}^{30} (i-3)^3$

33. Calcular las siguientes sumas

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{i+1} - \frac{1}{i}\right)$ 2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2i-1} - \frac{1}{2i+1}\right)$ 3. $\displaystyle\sum_{i=3}^{n} \frac{1}{2i^2 - 6i + 4}$

34. Demuestre que

$$\sum_{i=1}^{n} \left((i+1)^3 - (i-1)^3\right) = (n+1)^3 + n^3 - 1.$$

Respuestas: Ejercicios de aulas

2.1. $\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 4x + C$; 2.2. $-4\cos t + C$; 2.3. $\frac{5}{8}x^{\frac{8}{5}} + \frac{15}{29}x^{\frac{29}{15}} + \frac{15}{34}x^{\frac{34}{15}} + C$; 2.4. $\frac{3}{4}(3 - \cos x)^{\frac{4}{3}} + C$;

2.5. $\frac{1}{2}\operatorname{arcsen}(x^2) + C$; 2.6. $\arctan(x+3) + C$; 3. $f(x) = x^2 - 3x + 2$; 4. $\frac{5}{4}$;

Respuestas: Ejercicios

2.1. $1 - \sqrt{x}$; 2.2. $2x + 4$; 2.3. $\sqrt{x} - 1$; 2.4. $x - \sqrt{x} + 3$; 3.1. $x + C$; 3.2. $mx + C$; 3.3. $\frac{x^2}{2} + C$;

3.4. $\frac{x^3}{3} + C$; 3.5. $\frac{x^4}{4} + C$; 3.6. $2\sqrt{x} + C$; 3.7. $\frac{2}{3}x^{3/2} + C$; 3.8. $\frac{3}{4}x^{4/3} + C$; 3.9. $\frac{3}{2}x^{2/3} + C$;

3.10. $\frac{3}{8}x^{8/3} + C$; 3.11. $5x^{1/5} + C$; 3.12. $\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$; 3.13. $\operatorname{sen} x + C$; 3.14. $-\cos x + C$; 3.15. $\tan x + C$;

3.16. $\sec x + C$; 3.17. $-\csc x + C$; 3.18. $-\cot x + C$; 3.19. $\arctan x + C$; 3.20. $\operatorname{arcsen} x + C$;

5.1. $f(x) = 1$; 5.2. $f(x) = m$; 5.3. $f(x) = x$; 5.4. $f(x) = x^2$; 5.5. $f(x) = x^3$; 5.6. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$;

5.7. $f(x) = \sqrt{x}$; 5.8. $f(x) = \sqrt[3]{x}$; 5.9. $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$; 6.1. $6x + C$; 6.2. $\pi^3 x + C$; 6.3. $-2^{-5}x + C$;

6.4. $-\frac{1}{x} + C$; 6.5. $\frac{2}{3}x^{3/2} + C$; 6.6. $\frac{b^3}{3p^3} + C$; 6.7. $\frac{x^2}{2p^2} + C$; 6.8. $-\frac{a}{xp} + C$; 6.9. $\tan\theta + C$;

6.10. $-\cot\theta + C$; 6.11. $\frac{5}{7}x^{\frac{7}{5}} + \frac{1}{2x^2} + C$; 6.12. $\frac{1}{10}y^{10} - \frac{1}{3}y^6 + \frac{3}{2}y^2 + C$; 6.13. $\frac{1}{3}x^3 + x - \frac{1}{x} + C$;

6.14. $\frac{1}{5}y^5+2y^4+\frac{16}{3}y^3+C$; 6.15. $a^2t+\frac{1}{2}abt^4+\frac{1}{7}b^2t^7+C$; 6.16. $\frac{1}{3}a^3+a^2bt^3+ab^2t^6+C$;

6.17. $\frac{1}{4}x^4+x^3+\frac{3}{2}x^2+x+C$; 6.18. $\sqrt[3]{x}\left(\frac{3}{13}x^4-\frac{3}{7}x^2-6\right)+C$; 6.19. $\frac{tn}{n+1}(at)^{\frac{1}{n}}$; 6.20. $(nx)^{\frac{1}{n}}+C$;

6.21. $\frac{1}{3}x^3-x+C$; 6.22. $x+\cos x+C$; 6.23. $-\csc t-2t+C$; 6.24. $-x-\sqrt{2}\operatorname{sen}x+C$;

6.25. $\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\operatorname{sen}t+C$; 6.26. $\frac{1}{6x^3}\left(3x+18x^2-4\right)+C$; 6.27. $-x-2\cos x+C$;

6.28. $\sqrt[4]{x}\left(\frac{4}{5}x-4\right)+x^{\frac{7}{12}}\left(\frac{12}{19}x-\frac{12}{7}\right)+x^{\frac{11}{12}}\left(\frac{12}{23}x-\frac{12}{11}\right)+C$; 6.29. $\frac{1}{2x^4}\left(x^2+3\right)+C$;

6.30. $2x+\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{3x^3}\left(6x^2+1\right)+C$; 7.1. $\frac{4}{15}(5x)^{\frac{3}{4}}+C$; 7.2. $-\frac{1}{3}(3-t)^3+C$; 7.3. $\frac{1}{3}\operatorname{sen}^3x+C$;

7.4. $-\frac{3}{b}\sqrt[3]{\cos(bx)}+C$; 7.5. $\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\operatorname{sen}2t+C$; 7.6. $\frac{1}{3}\cos^3x-\cos x+C$; 7.7. $\frac{1}{21}(3x+5)^7+C$;

7.8. $\frac{3}{5a}\tan^{\frac{5}{3}}(ax)+C$; 7.9. $-\sqrt{1-x^2}+C$; 7.10. $\frac{1}{4}\tan^4t+C$; 7.11. $\frac{2}{5}(4-x)^{\frac{5}{2}}-\frac{8}{3}(4-x)^{\frac{3}{2}}+C$;

7.12. $\frac{1}{2}\cos(2\cos x)+C$; 7.13. $\operatorname{arcsen}\frac{1}{3}x+C$; 7.14. $-\frac{1}{3}\left(2a^2+x^2\right)\sqrt{a^2-x^2}+C$; 7.15. $2\cos\sqrt{1-t}+C$;

7.16. $\frac{3}{2}\arctan 2x-\frac{1}{3}(\arctan 2x)^{\frac{3}{2}}+C$; 7.17. $\frac{2}{3}\cos^3t-\cos t-\frac{1}{5}\cos^5t+C$; 7.18. $\frac{1}{2}\operatorname{sen}2t-\frac{1}{6}\operatorname{sen}^32t+C$;

7.19. $\frac{8}{81}(3t+2)^{\frac{3}{2}}-\frac{8}{135}(3t+2)^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{189}(3t+2)^{\frac{7}{2}}+C$; 7.20. $\frac{1}{2}\cos\left(1-x^2\right)+C$;

7.21. $\frac{1}{5}\left(24+4x^2+x^4\right)\sqrt{x^2-3}+C$; 7.22. $\sqrt{x^4-1}\left(\frac{1}{6}x^4+\frac{1}{3}\right)+C$; 7.23. $\frac{1}{3}\arctan(3x-1)+C$;

7.24. $-\frac{1}{2}\operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{2}-x\right)+C$; 7.25. $-\frac{1}{2}\operatorname{arcsen}\left(1-x^2\right)+C$; 7.26. $2\arctan\sqrt{2x-1}+C$; 7.27. $\frac{-1}{1+\operatorname{sen}^2x}+C$;

7.28. $\frac{1}{2}\sec(1-2t)-\frac{1}{6}\sec^3(1-2t)+C$; 7.29. $-\frac{1}{3}\operatorname{arcsen}(1-3x)+C$; 7.30. $-\frac{3}{10}\left(2-5\sqrt{x}\right)^{\frac{4}{3}}+C$;

7.31. $\frac{1}{8}\arctan\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cos x\right)+C$; 8. $f(x)=\frac{4}{3}x^3+\frac{2}{3}$; 9. $f(x)=x^{\frac{3}{2}}-2\sqrt{x}$; 10. $\frac{300\sqrt{2}}{11}$ min/h;

17.1. $9+16+25+36+49+81+100+121$; 17.2. $\frac{1}{4}+\frac{2}{5}+\frac{3}{6}+\frac{4}{7}+\frac{5}{8}$; 17.3. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}$;

18.1. $\sum_{i=1}^{10}i$; 18.2. $\sum_{k=3}^{7}\sqrt{k}$; 18.3. $\sum_{i=1}^{10}\frac{i}{i+1}$; 18.4. $\sum_{i=3}^{23}\frac{i}{i+1}$; 18.5. $\sum_{k=1}^{n}2k$; 19.1. $\frac{n(n+1)}{2}$;

19.2. $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; 19.3. $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$; 19.4. $\frac{n(n+1)\left(6n^3+9n^2+n-1\right)}{30}$; 20.1. $\frac{n(3n-1)}{2}$; 20.2. $\frac{n(4n+5)(n+1)}{6}$;

20.3. $-\frac{n(n-3)\left(n^2-3n+4\right)}{4}$; 20.4. $\frac{n\left(3n-2n^2-6\right)}{6}$; 21.1. $1-\frac{1}{2n+1}$; 21.2. $\frac{5}{6}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}$; 21.3. $\frac{3}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$;

23.1. $\frac{195}{4}$; 23.2. 14; 25. $\frac{2n+1}{3}$;

Bibliografía

1. **Purcell, E. - Varberg, D. - Rigdon, S.**: "Cálculo". Novena Edición. PEARSON Prentice Hall.
2. **Stewart, J.**: "Cálculo". Grupo Editorial Iberoamericano.